

I. Fonction exponentielle népérien

1) Définition :

La fonction exponentielle notée \exp , est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien \ln

$$]0; +\infty[\xleftrightarrow[\exp]{\ln} \mathbb{R} \quad ; \quad \exp : \mathbb{R} \rightarrow]0; +\infty[$$

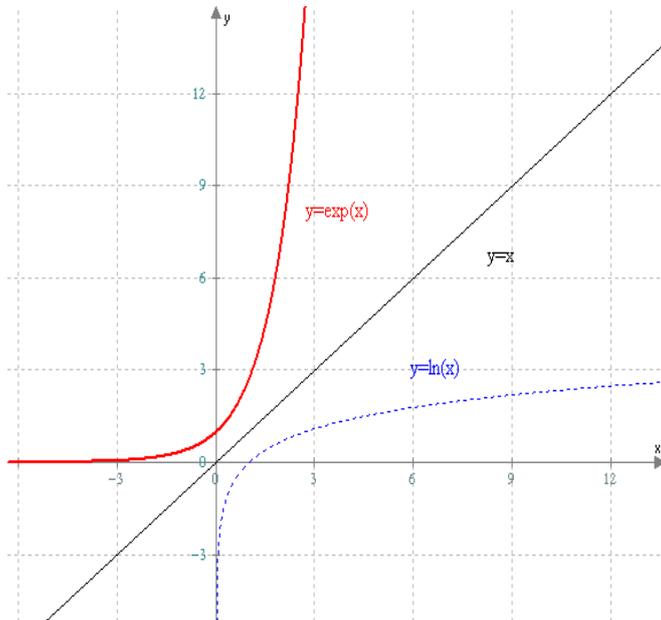
$$x \mapsto \exp(x)$$

Remarque : Pour tout x de \mathbb{R} : $\exp(x) > 0$

Notation : on note $\exp(x) = e^x$ et se lit : exponentielle de x ou e puissance x

2) Représentation graphique:

La courbe représentative graphique de la fonction \exp dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est la symétrique à la courbe de la fonction \ln par rapport à la première bissectrice



3) Conséquences immédiates :

- $(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}_+^*) : y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$
- $(\forall x \in \mathbb{R}) : \ln(e^x) = x$; $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : e^{\ln x} = x$
- $(\forall x \in \mathbb{R}) : e^x > 0$
- $e^0 = 1$ et $e^1 = e \approx 2,718...$
- La fonction \exp est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} et on a :
 $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 : x = y \Leftrightarrow e^x = e^y$ et $x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$
- $x < 0 \Leftrightarrow e^x < 1$ et $x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

4) Propriétés algébriques de la fonction exp

Propriété

Pour tout x et y de \mathbb{R} : $e^x \times e^y = e^{x+y}$

Règles de calcul:

Pour tout x et y de \mathbb{R} et pour tout r de \mathbb{Q} . on a :

$$e^{-y} = \frac{1}{e^y} \quad ; \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad ; \quad e^{rx} = (e^x)^r$$

Exercice 1:

1. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivante :

$$e^{x-1} = e, \quad e^{x^2-x} = 1, \quad e^{2x} - 3e^x + 2 = 0, \quad e^x - 2e^{-x} - 1 = 0$$

2. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivante :

$$e^{x-2} < 1, \quad e^{2x} - 6e^x + 5 \geq 0, \quad e^{3x+1} - 2e^{2x+1} + e^{x+1} < 0$$

5) Dérivée de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et on a:

$$\forall x \in \mathbb{R} ; (e^x)' = e^x$$

D'une façon générale :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I : (e^{u(x)})' = (u(x))' \times e^{u(x)}$$

La fonction $x \mapsto u'(x) \times e^{u(x)}$ admet pour primitives, les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + C$ avec C une constante réelle

Exercice 2:

Calculer les dérivées de la fonction f dans les cas suivants :

$$f(x) = e^{(x^2+x-1)} ; \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} ; \quad f(x) = xe^{(x+1)} ; \quad f(x) = \frac{1}{x}e^{(x^2)}$$

6) Limites Remarquable :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Exercice 3:

Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} e^{-x} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

En général:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

II. Etude et représentation graphique de fonctions composées

Exercice 4:

Etudier et représenter graphiquement la fonction f dans les cas suivants:

$$f : x \mapsto (x-1)e^x ; \quad f : x \mapsto \frac{e^x}{x} ; \quad f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x} ; \quad f : x \mapsto \frac{xe^x}{2x-1}$$

III. Fonction exponentielle de base a : ($a > 0$ et $a \neq 1$)

1) Définition:

La fonction exponentielle de base quelconque a notée : \exp_a est la fonction réciproque de la fonction logarithme de a

On note la fonction exponentielle de base a par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; \exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$$

Remarque:

Si $a = e$ alors $\exp_e(x) = e^{x \ln e} = e^x$

Si $a = 1$ alors on admet que pour tout x de \mathbb{R} ; $\exp_1(x) = 1^x = 1$

2) Propriétés:

Pour tout x et y de \mathbb{R} et pour tout r de \mathbb{Q} . on a :

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \quad a^{-y} = \frac{1}{a^y} \quad ; \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad ; \quad a^{rx} = (a^x)^r$$

$$x = y \Leftrightarrow a^x = a^y \quad \text{et} \quad x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$$

Exercice 5:

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes:

$$5 \times 2^x - 2 = 0 \quad ; \quad 4^x - 3 \times 2^x + 2 = 0 \quad ; \quad 4^x - 3 \times 2^x + 2 = 0$$

Exercice 6:

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes:

$$2^{x-1} - 1 < 0 \quad ; \quad 4^x - 3 \times 2^x + 2 \geq 0 \quad ; \quad 9^x - 3^{x+1} + 2 < 0$$

3) Dérivée de la fonction \exp_a

La fonction exponentielle de base a est dérivable sur \mathbb{R} . et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} : (a^x)' = (\ln a) a^x$$

Si $0 < a < 1$ alors $\ln a < 0$		Si $a > 1$ alors $\ln a > 0$	
x	$-\infty \qquad \qquad \qquad +\infty$	x	$-\infty \qquad \qquad \qquad +\infty$
$(a^x)'$	-	$(a^x)'$	+
a^x	$+\infty \quad \searrow \quad 0$	a^x	$0 \quad \nearrow \quad +\infty$

Exercice 7:

Représenter graphiquement la fonction f dans les deux cas suivants:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad ; \quad f(x) = 2^x$$

Exercices :

Exo1:

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes:

$$7^{2x} - 5^{3x+1} = 0 \quad ; \quad 2^{x+1} + 3 \times 2^{-x} - 7 = 0 \quad ; \quad 100^x - 10^x = 2 \quad ; \quad (\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$$

$$\log_2(x) \times \log_8(x) = 3 \quad ; \quad \log_a(x) - \log_{a^2}(x) + \log_{a^4}(x) = \frac{3}{4}$$

Exo2:

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes:

$$1 + \left(\frac{1}{3}\right)^x > 5 \quad ; \quad 2^{2x-1} - 3^{x+2} + 4^{x+\frac{1}{2}} + 9^{\frac{x}{2}} < 0 \quad ; \quad 4^x - 3 \times 2^x + 2 \geq 0$$

Exo3:

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{x^3} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 3x^2 + 1) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^9 - e^x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{2008}}{e^{-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - 3x}{x^3} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 - e^x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-3}}{x^5} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right);$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{2x} - 3e^{\frac{1}{2}x}\right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} e^{\sqrt{x}} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x \ln x}}{\ln(1+x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x^5}\right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} \ln x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x) - x}{x - e^x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - xe^x}{x - 1}$$